「現代物理」ニュートン力学

片桐奏羽

2012/3/4

Abstract

放送大学テキスト「現代物理」を参考に、ニュートン力学の概要を説明する。

Contents

1 物理における無限大と無限小

- ∞ はある十分大きな値 Λ を考えて、その Λ をどこまでも大きくすることを考えている。
- 実際の物理の理論には適応条件があり、本来、この Λ は有限の値を取るはずだが、無限大まで成り立っているととりあえず仮定してみて、必要に応じて Λ を復活させる。
- Λ はしばしばスケールと呼ばれる。

- 無限小においてもある十分小さい値 ϵ を考えて、その ϵ を 0 に持って行く、この極限を考えているので、物理の法則で微分方程式が成立する。
- つまり、ϵ より小さい現象を無視している。

2　微分的な法則の微分形と積分形

2.1　微分

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\approxeq f'(x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

2.1.1　計算例

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

2.2　積分

さしあたり積分は微分の逆だと思うことにする。

$$\int \sim d^{-1}$$

$$\int df(x) = d^{-1}df(x) = f(x) + const$$

定数がつくのは

$$dx = d(x + const)$$

定積分

$$\int_{X=x_0}^{X=x} df(X) = [f(X)]_{X=x_0}^{X=x} = f(x) - f(x_0)$$

なので やってる事は同じ。

2.2.1　計算例

$$\int 3x^2 dx = \int d(x^3) = x^3 + const$$

2.3　微分で書かれた法則の積分形

$$df(x) = g(x)dx$$

のような法則が頻出する。これは積分すると

$$\int df(x) = \int g(x)dx$$

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(X)dX$$

のような積分形で書ける。

3　アインシュタインの規約とドウィット縮約

添字についての表記に便利な約束がある。

3.1　アインシュタインの規約

$$\sum_i A^i B_i \equiv A^i B_i$$

同じ添字が二つあったら和の記号を省略して書く。アインシュタインの規約をとるときは
「アインシュタインの規約をとります」と宣言するのがマナー。

3.2　ドウィット縮約

アインシュタインの規約に加えて

$$\int dx f(x)g(x) \equiv f(x)g(x)$$

また連続変数も離散変数も同じ書き方をしたりする。

$$A_i(x) \equiv A_{i,x} = A(i,x)$$

3.3 計算例

$$A_{i,x}B^{i,x} = \sum_i \int dx A_i(x) B^i(x)$$

4 ベクトル

例として 2 次元ベクトルを成分で書く。

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

ベクトル記号の矢印は文脈に応じて省略される。

$$= A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2$$

ベクトルを（正規直交）基底で展開するという。

$$\vec{A}^t = (A_1, A_2)$$

ベクトルの内積

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}^t \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 = \sum_i A_i B_i$$

ベクトルを単位方向ベクトルで書く

$$\vec{A} = |A| \vec{e}_A$$

$$\vec{e}_A \equiv \frac{\vec{A}}{|A|}$$

$$|A| \equiv \sqrt{\vec{A}^t \vec{A}}$$

$$\vec{e}_A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

4.1 ブラケット記法

$$\vec{A} \equiv |A\rangle$$

$$\vec{A}^t \equiv \langle A|$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \langle A|B\rangle$$

後に量子論で出てくる便利な記法。ベクトルを扱う際に便利。

5 力学に出てくる概念用語

5.1 ニュートン力学の基本的な概念

- 時間と空間があって、物体はある位置にある空間に存在する。
- 物体は運動する。
- 運動する物体は時空間上に軌跡を描く。
- 物体の運動は力をうけて変化する。

5.2 力

ベクトル量である。

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = |F|\vec{e}_F$$

5.3 質点

- 物体の一番簡単な近似。
- 質量 (慣性質量) は持っている。
- 大きさや（力学的な）内部構造を持たない。
- 質点近似で対応できない場合、必要に応じて近似を高める。（剛体、弾性体 etc.）
- 必要に応じて、電荷等の属性を持たせることもある。

5.3.1 注意点

- 質点が素粒子（アトム）であるとは言ってない。例えば、地球を質点と考えたりする。
- もちろん、地球を構成するアトムを質点と考えても良い（理論が適応範囲なのかは別だが）

5.4 運動

5.4.1 位置

位置はベクトル量

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5.5 運動

位置が時間の関数であること

$$\vec{x}(t)$$

静止と運動の対比で考える運動は、さらに静止していないことが条件。

5.6 速度と加速度

$$\frac{dx}{dt} \equiv v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \equiv a$$

$$x = \int v dt$$

$$v = \int a dt$$

6 ニュートンの運動法則

6.1 慣性の法則

物体に力が働いていない時は物体は等速運動（静止を含む）する。

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \ddot{\vec{x}} = 0$$

6.2 ニュートンの運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\dot{\vec{v}}$$

$$= m\ddot{\vec{x}}$$

6.2.1　なんとなく納得する方法

以下の観測結果があるとする。

- 力を加えると速度が変化した。（力を加えないと速度が変化しない）

$$\Delta v = l(\vec{F})\vec{F}\Delta t$$

- 速度の変化は質量に依存した。

$$\Delta v = l(m, \vec{F})\vec{F}\Delta t$$

- 力が 2 倍になると速度の変化も 2 倍になった。

$$\Delta v = l(m)\vec{F}\Delta t$$

- 質量が 2 倍になると速度の変化が 1/2 倍になった。

$$\Delta v = const\,(1/m)\,\vec{F}\Delta t$$

比例定数は単位に押し込めて

$$m\frac{dv}{dt} = \vec{F}$$

注　質点が時間変化しないという仮定を入れて簡単化している。質量も時間変化するなら
$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

6.3　作用反作用の法則

物体 A が物体 B に力を与えたすると、同時に、物体 B は物体 A によって力を受けている。

両者の力の総和は等しい。

$$m_A\vec{a}_A = \vec{F}_A$$

$$m_B\vec{a}_B = \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

6.3.1　注意点

- 二つの物体は空間的にどんなに遠くても良い。（瞬時に情報伝達ができる。いわばテレパシー可能）

6.4　補足

- 質量の正負は形式上制限はない。観測上、質量は正である。
- 時間の方向は形式上決まっていない。
- 空間の次元は形式上決まっていない。観測上は 3 次元である。（時間の次元は 1 と形式的に決めてある）

7　力と運動の例

7.1　重力

質点 A,B があるとして、質点は重力質量 (m_G) をも持つとする。

$$\vec{r} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$

$$m_A \vec{a}_A = \vec{F}(\vec{r})$$

$$m_B \vec{a}_B = \vec{F}(-\vec{r})$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\Gamma \frac{m_{G,A} m_{G,B}}{r^2} \vec{e}_r$$

質量（慣性質量）と重力質量は常に一定の比例関係になっていることが観測されているので

$$m = m_G$$

これを等価原理（仮定）と呼ぶ。

7.2　地球上の運動

地球（質量 $M_\oplus$）とその地表から l の距離にいる質点 (質量 m) を考える。

地球の半径を R とする。座標を、地球と質点を結ぶ方向に z 軸をとる ($\vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)。

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_\oplus = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z - R \end{pmatrix} = (z - R)\vec{e}_r$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(z-R)^2} = \frac{1}{R^2(1 - \left(\frac{z}{R}\right)^2)} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{1-\epsilon^2}\right).$$

$$= \frac{1}{R^2}(1 - 2\epsilon + \dots)$$

$$\approx \frac{1}{R^2}$$

$$F(\vec{r}) = \text{-}\Gamma \frac{M_\oplus m}{R^2}\vec{e}_r$$
$$= -m\left(\Gamma\frac{M_\oplus}{R^2}\right)\vec{e}_r$$

$$\equiv -mg\vec{e}_r$$

よって

$$m\vec{a} = -mg\vec{e}_r$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

これを積分してやれば

$$\vec{v} = -gt\vec{e}_r + \vec{v}_0$$

$$\vec{x} = -\frac{1}{2}gt^2\vec{e}_r + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

7.2.1 具体的に

時刻０でボールの位置を原点として、速さ v_0、x 方向に、z 軸からの角度 θ で投げ上げたとき

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = v_0\begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_0 t\cos\theta \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta \end{pmatrix}$$

真上に投げた時 $(\theta = 0)$ が一番高く上がる。

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

最大値は

$$v_z = -gt + v_0$$

より

$$t = \frac{v_0}{g}$$

の時、

$$\mathrm{z}{=}\frac{v_0^2}{2g}$$

7.3 バネ振動：調和振動（単振動）

二つの質点 (A,B) がバネでつながれているとする。バネの自然長を l として、バネの方向を $\vec{e_l}$ とする。

バネの伸びを $\vec{u}$ と書けば、質点間は

$$\vec{r} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \vec{l} + \vec{u}$$

バネによる力はフックの法則

$$F(\vec{u}) = -k\vec{u} = -ku\vec{e}_u$$

簡単のため、１方向しか考えないとすると

$$F(x) = -ku$$

$$u = x - l$$

片方の質点が固定されて動かないとすると

$$m\ddot{x} = -ku$$

$$m\ddot{\mathrm{u}} = -ku$$

$$\ddot{\mathrm{u}} = -\left(\frac{k}{m}\right)u$$

$$\equiv -\omega^2 u$$

この一般解は[1]

[1]
$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)u = 0$$

$$u(t) = p\cos\omega t + q\sin\omega t$$

$$= p(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}) + q(\frac{e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i})$$

$$= \left(\frac{p-iq}{2}\right)e^{i\omega t} + \left(\frac{p+iq}{2}\right)e^{-i\omega t}$$

$$= C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

$$C_+ = \frac{p-iq}{2},\ C_- = \frac{p+iq}{2}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)u = 0$$

$$\zeta = (\frac{d}{dt} - i\omega)u$$

$$\xi = \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)u$$

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\zeta = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)\xi = 0$$

$$\zeta = A_- e^{-i\omega t}$$

$$\xi = A_+ e^{+i\omega t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)u = A_- e^{-i\omega t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)u = A_+ e^{+i\omega t}$$

$$u_- = C_- e^{-i\omega t}, C_- = -2i\omega A_-$$

$$u_+ = C_+ e^{+i\omega t}, C_+ = +2i\omega A_+$$

$$u = C_+ e^{+i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$$

と計算しても良い。

$$p = C_+ + C_-$$

$$q = i(C_+ - C_-)$$

$$u(t) = \frac{A}{2}e^{i(\omega t - \theta_0)} + \frac{A}{2}e^{-i(\omega t + \theta_0)}$$

]

$$C_+ \equiv \frac{A}{2}e^{-i\theta_0} \ C_- \equiv \frac{A}{2}e^{+i\theta_0}$$

$$p = Acos\theta_0$$

$$q = A\sin\theta_0$$

$$u(t) = A\cos\theta_0\cos\omega t + A\sin\theta_0\sin\omega t$$

$$= A\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$A^2 = p^2 + q^2$$

$$\frac{p}{q} = \tan\theta_0$$

時刻０で伸びが０だとすると

$$u(0) = 0$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$u(t) = A\sin\omega t$$

7.3.1 単振動の用語

A 振幅
θ_0 振動の位相
T 振動の周期

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ν 振動数

$$\nu = T^{-1}$$

8　保存則と対称性

8.1　仕事

位置の時間変化が速度だった。

$$dx = v(t)dt$$

同様に、

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

として、W を導入し、これを仕事と呼ぶ。
つまり、仕事の空間変化が力である。

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

今、力が位置によらないとすると、

$$W = \vec{F} \cdot \int d\vec{x} \equiv \vec{F} \cdot \vec{d} = |F||d| \cos\theta$$

補足

- 力と移動方向が直交していると $\vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$ より、仕事は 0 である。
- 質点が 2 個あれば、$W = W_1 + W_2$

8.2　ポテンシャルエネルギー

力がその場所で決まっている場合、
$\vec{F}(\vec{x})$

$$U = -W$$

でポテンシャルエネルギーを定義する。

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$\vec{\nabla} U = -\vec{F}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} U = gradU = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

8.2.1　重力

$$F = -mg$$

$$dU = mgdz$$

$$U = \int_0^h mgdz$$

$$U = mgh$$

8.2.2　バネ（調和振動子)

$$F = -k(x - l)$$

$$dU = k(x - l)dx$$

$$dU = k(x - l)d(x - l)$$

$$= \frac{k}{2}d(x - l)^2$$

$$U = \int_{X=l}^{X=x} \frac{k}{2}d(X - l)^2$$

$$U = \frac{k}{2}(x - l)^2$$

逆に力を求めたければ

$$dU = \frac{k}{2}d(x - l)^2 = k(x - l)dx$$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -k(x - l)$$

8.3 運動エネルギー

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

$\vec{p}$ を運動量と呼ぶ。

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

$$dK = \vec{p} \cdot d\vec{v}$$

K を運動エネルギーと呼ぶ。

$$K = \int \vec{p} \cdot d\vec{v}$$

$$= m \int \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2}m \int d(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

運動エネルギーの速度変化が運動量である。

8.4 力学的エネルギー保存則

力学的エネルギー（全エネルギー）を

$$E \equiv K + U$$

と定義する。

$$dE = dK + dU$$

$$dE = \vec{p} \cdot d\vec{v} - \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{a}dt - \vec{F} \cdot \vec{v}dt$$

$$= \left(\vec{p} \cdot \vec{a} - \vec{F} \cdot \vec{v}\right) dt$$

$$= \left(\vec{v} \cdot m\vec{a} - \vec{F} \cdot \vec{v}\right) dt$$

$$= \left(\vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{F} \cdot \vec{v}\right) dt$$

$$= 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$E = E_0$$

もし、ポテンシャルエネルギーが

$$U(x, \dot{x}, t)$$

なら、

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}dt + \frac{\partial U}{\partial t}dt$$

$$= -Fvdt + \frac{\partial U}{\partial v}adt + \dot{U}dt$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial v}a + \dot{U}\right) \equiv \xi(t)$$

となって、保存しない。

9　対称性と保存則

9.1　時間推進対称性と力学的エネルギー保存則

$$dE = \xi(t)dt$$

力学的エネルギーが保存しない場合、時間の変化は力学的エネルギーの変化と 1 対 1 に対応する。

力学的エネルギーが保存する場合、時間の変化は力学的エネルギーの変化と無関係。

対称性

A を変化させても不変なもの B がある場合、B が A に対する変換の対称性があるという。

時間の変化の不変性->原点の位置の任意性

9.2 重力の場合

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\theta \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = +\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mg(v_0 t)\sin\theta$$

$$U = mgz = mg(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mg(v_0 t)\sin\theta$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2$$

9.3 運動量保存則

お互いに力を受けている 2 個の質点 (それ以外からの力はない) の全運動量を

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

とする。

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}_{1\to 2} - \vec{F}_{1\to 2} = 0$$

つまり、作用反作用の法則が成り立つ限り、全運動量は保存する。

9.3.1 力がポテンシャルで書けるとき

$$dU(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{\nabla}_{x_1} U \cdot d\vec{x}_1 + \vec{\nabla}_{x_2} U \cdot d\vec{x}_2$$

$$= -\vec{F}_{2\to1} \cdot d\vec{x}_1 - \vec{F}_{1\to2} \cdot d\vec{x}_2$$

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{\nabla}_{x_1} U$$

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{\nabla}_{x_2} U$$

1 次元で

$$F_{2\to1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, x_2)$$

$$F_{1\to2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2)$$

作用反作用が成り立つなら

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) U(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_+} U(z_+, z_-) = 0$$

$$z_+ = x_2 + x_1$$

$$z_- = x_2 - x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(z_+ - z_-)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(z_+ + z_-)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_+} = \frac{\partial x_1}{\partial z_+} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z_+} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_-} = \frac{\partial x_1}{\partial z_-}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z_-}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

$$U(z_+, z_-) = U(z_-) = U(x_2 - x_1)$$

ポテンシャルが並進対称性を持つことが、運動量保存（作用、反作用）が成り立つ条件

補足

運動エネルギー K も並進対称
なぜなら

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{x} + \vec{c}) = \frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v}$$

よって、力学的エネルギー全体が並進対称不変性を持つことになる。

10　角運動量と角運動量保存則

10.1　外積

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} A_i B_j$$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

$$\epsilon_{112} = \ldots = 0$$

$$p\begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = pr\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

[2]

10.2 角運動量

$$\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{v}} \times \vec{p} + \vec{x} \times \vec{F} = \vec{x} \times \vec{F}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{x})$$

もし、

$$\vec{F} = f(\vec{x})\vec{e}_x$$

なら角運動量が保存する。

$$-\vec{\nabla} U(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{e}_x$$

$$dU(\vec{x}) = -f(\vec{x})\vec{e}_x \cdot d\vec{x}$$

$$= -f(\vec{x})dr$$

$$r^2 \equiv \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$\frac{dU(r)}{dr} = -f(r)$$

角運動量はポテンシャルが座標の回転によらないときに等しい。

[2] 2 次元では次の関係がある。

$$A = A_1 + iA_2$$

$$B = B_1 + iB_2$$

$$A\bar{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + i(A_2B_1 - A_1B_2)$$

$$= \vec{A} \cdot \vec{B} + i(\vec{A} \times \vec{B})_3$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = Re(A\bar{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_3 = Im(A\bar{B})$$

補足

運動エネルギーは座標の回転につねによらない。

$$\vec{v}^2 = |v|^2$$

よって、この時、力学的エネルギーは座標回転によらない。

11　ラグランジアンとネーターの定理

11.1　ラグランジアン

$$L \equiv K + W = K - U$$

11.2　作用

$$S = \int L dt$$

11.3　最小作用の原理

$$\delta S = \int \delta L dt = \int \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \right) dt$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) \right) \delta x dt$$

$$\delta S = 0 \to \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = 0$$

この式をオイラー・ラグランジュ方程式と呼ぶ。

$$L = K - U$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right) = 0$$

$$F(x) - \frac{d}{dt} (mv) = 0$$

$$ma = F$$