第 8 回 物理の勉強会
謎を解く手がかり: エネルギーの量子化*

小又 志郎

2012 年 6 月 24 日

概要

前回提示された「深まる謎」に挑戦する過程で「量子」「量子性」「量子化」などの概念が生まれてくる状況をたどります。

前回の宿題

比熱 0	→ 5.2 低温比熱の謎を解く: 温度と量子性
黒体放射のスペクトル	→ 5.1 黒体放射の謎を解く: エネルギー量子
離散スペクトル	→ 5.4 原子スペクトルの謎を解く: 原子の構造
光電効果	→ 5.3 光電効果の謎を解く: 光量子

1 黒体放射

黒体放射: 温度一定の系 (熱浴と接する系) における光のエネルギーに統計力学を適用する。

正準分布 (カノニカル分布): 温度 T のとき、エネルギー E の微視状態の実現確率 $p(E)$ は

$$p(E) \propto e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

規格化

$$p(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E}$$

とおいて

$$\int p(E)\, dE = 1 \quad (\text{連続の場合})$$

または

$$\sum_i p(E_i) = 1 \quad (\text{離散の場合})$$

から決める。

* 文献 [1], 第 5 章

連続の場合

$$Z = \int_0^\infty e^{-\beta E}\,dE = \left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta E}\right]_0^\infty = \frac{1}{\beta}$$

エネルギー E の平均値 $\langle E\rangle$ は

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \int_0^\infty Ep(E)\,dE = \frac{1}{Z}\int_0^\infty Ee^{-\beta E}\,dE \\
&= -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^\infty e^{-\beta E}\,dE = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial\log Z}{\partial\beta} \\
&= \frac{\partial\log\beta}{\partial\beta} \qquad \left(\log Z = \log\frac{1}{\beta} = -\log\beta\right) \\
&= \frac{1}{\beta} = k_B T
\end{aligned}$$

離散の場合

$$E_n = 0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots, n\epsilon, \ldots$$

$$Z = \sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^\infty e^{-\beta n\epsilon} = \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon}} \quad (\text{等比級数の和})$$

$$p(E_n) = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n} = e^{-\beta n\epsilon}(1-e^{-\beta\epsilon})$$

エネルギー E の平均値 $\langle E\rangle$ は

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \sum_{n=0}^\infty E_n p(E_n) \\
&= \sum_{n=0}^\infty n\epsilon\, e^{-\beta n\epsilon}(1-e^{-\beta\epsilon}) \\
&= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{\partial\log Z}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\log(1-e^{-\beta\epsilon}) \quad \left(\log Z = -\log(1-e^{-\beta\epsilon})\right) \\
&= \frac{\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1-e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}
\end{aligned}$$

この式を、プランクの放射式に基づく

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}$$

と比較して、

$$\epsilon = h\nu: \quad \text{エネルギー量子 (プランク}, 1900)$$

2　比熱

比熱: 温度を 1 単位上げるのに必要な熱量 (=エネルギー): $C = dE/dT$

プランクの放射式の導出は、光に固有の性質を使っていない。すなわち、離散的なエネルギー量子がカノニカル分布に従う (温度 T の熱浴に接している) という仮定のみ。

$\to$ ϵ が phonon (格子振動) のエネルギーだと思って、固体の振動の全自由度 ($3N$) に等分配されるとすると、固体の平均エネルギーは

$$\langle E_N \rangle = 3N \cdot \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

比熱は

$$C = \frac{d\langle E_N \rangle}{dT} = 3Nk_B(\beta h\nu)^2 \frac{e^{\beta h\nu}}{(e^{\beta h\nu} - 1)^2} \quad (\text{アインシュタイン}, 1906)$$

cf.

- アインシュタイン: 固体を独立な調和振動子の集まり（自由なフォノン）で近似
- デバイ (1912): 連成振動 (分散関係) を考慮 $\to$ 実験と精度良く一致

3　光電効果

エネルギーの出入りが量子的になっているだけでなく、光が粒子として振る舞うことを主張 (アインシュタイン, 1905)。

実証されたのは、コンプトン効果の発見 (1923): 光が運動量 $p = \hbar k$ をもち、電子との衝突で運動量保存則を満たす。

なお、コンプトン効果の発見というのは、現象が光の粒子性によるものであることの発見であって、現象そのものは前から知られていた。

X 線の散乱: それ以前にあったのはトムソンの理論 (トムソン散乱) で、これによれば、散乱された X 線の波長は入射 X 線の波長と同じになる。

問題 1　コンプトンの関係式 (教科書の式 (5.4))

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

を導け。—

なお

$$\frac{h}{m_e c} \equiv \lambda_e$$

を (電子の) コンプトン波長という。その具体的値は、下記の「覚えるべき数値」を使って計算すると、

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2\pi \frac{\hbar c}{m_e c^2} = 2\pi \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0.511 \text{ MeV}}$$
$$= 2.4 \text{ pm} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

で、X 線–γ 線領域の波長である。

2π の係数が煩わしいので、それを除いた換算コンプトン波長 (reduced Compton wavelength)

$$ƛ_{\mathrm{e}} = \frac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}$$

もしばしば用いられる。

4　原子の構造

ヒント: 周期律 $\cdots$ しかし、古典物理による説明は失敗。

困ったときの次元解析: m_{e}, e, $\hbar$ から長さの次元の量を作ると

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_{\mathrm{e}}e^2} \quad \left(= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2}\,\frac{\hbar c}{m_{\mathrm{e}}c^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\hbar c}{m_{\mathrm{e}}c^2}\right)$$

ここで、覚えるべき数値:

- $\alpha \sim \frac{1}{137}$　微細構造定数 (fine structure constant)
- $\hbar c \sim 197\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm} = 197\ \mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$
- $m_{\mathrm{e}}c^2 \sim 0.511\ \mathrm{MeV}$　電子の静止質量

ついでに

- $c \sim 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$
- $e \sim 1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
- $m_{\mathrm{p}}c^2 \sim 938\ \mathrm{MeV}$　陽子の静止質量
- $m_{\pi^+}c^2 \sim 140\ \mathrm{MeV}$　π^+ 中間子の静止質量

も覚えておくと便利です。[*1]

これらを使うと (教科書の課題 3)、

$$a_0 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\hbar c}{m_{\mathrm{e}}c^2} = 137\cdot\frac{197}{0.511}\ \mathrm{fm} = 0.53\times 10^{-10}\ \mathrm{m} \quad (1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m})$$

よって、

$$a_0 \sim \text{原子の大きさ}$$

ということは、プランクの h ($\hbar$) は原子の構造にも関係しているはず。

$\to$ ボーアの仮定

I) とびとびのエネルギー準位 $E_1, E_2, \ldots$ をもつ電子の 定常状態 が存在する。

II) 定常状態の間の遷移でエネルギー差に等しい光子を放射・吸収

状態 $m \to n$ の遷移にともなう光の振動数 ν は、エネルギー量子の関係で与えられる (振動数条件)

- 放射: $h\nu = E_m - E_n \quad (E_m > E_n)$
- 吸収: $h\nu = E_n - E_m \quad (E_m < E_n)$

III) $n \gg 1$ の定常状態では、電子は古典論に従う (対応原理)

[*1] 基礎物理定数については、例えば『理科年表』を参照。最新の詳細なデータは、Particle Data Group ([9]) のものが便利。

(以下、歴史的経緯とも、教科書の説明とも異なりますが)
重要な保存量: エネルギー、運動量、角運動量
エネルギーは、$E = h\nu = \hbar\omega$ で量子化。
$\rightarrow$ 他の 2 つも？
そこで

- エネルギー: $E = n\hbar\omega$
- 運動量: $p = n\hbar k$
- 角運動量: $L = n\hbar$ (量子化条件)

量子化条件と対応原理から、リュードベリ定数 R が精密に求まった。
水素原子の線スペクトル (状態 $m \rightarrow n$ の遷移) に対するリュードベリの公式 (実験から求められた式)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

5 ちゃんと学ぶために

黒体放射については、文献 [2] の第 7 章「電磁場と黒体輻射」に、歴史的背景から電磁場の量子化や宇宙背景輻射 (CMB) に至るまで面白く書いてあります。

固体 (結晶) の比熱については、やはり文献 [2] の第 6 章「格子振動と結晶の比熱」がすばらしい。デバイの理論 (低温での比熱が T^3 に比例) も詳しく書いてあります。

また、以上の黒体放射と比熱については、文献 [3] の第 1 章「エネルギー量子の発見」も良いです。

光電効果については、文献 [3] の第 2 章「光の粒子性」の §12「光電効果」および §13「Compton 効果」が読みやすい。

原子の構造 (原子のスペクトル) に関して、量子力学成立以前の知見については、同じく文献 [3] の第 3 章「前記量子力学」および第 4 章「原子の殻状構造」。

なお、歴史的なことに関しては、文献 [4], [5], [6] (の下巻) などが良いと思います (ただし最初の本以外は品切か)。ボーアの原論文 (文献 [7], [8]) は今でも読む価値はあると思います (決して読みやすくはないですが)。

参考文献

[1] 生井澤寛・吉岡大二郎『現代物理』, 放送大学教育振興会, 2008
[2] 田崎晴明『統計力学』(全 2 巻), 新物理学シリーズ 37, 38, 培風館, 2008
[3] 朝永振一郎『量子力学』(全 2 巻 + 補巻), みすず書房, 1969, 1997, 1989
[4] 高林武彦『量子論の発展史』, ちくま学芸文庫, 2010
[5] 天野清『量子力学史』, 中央公論社自然選書, 1973
[6] 広重徹『物理学史』(全 2 巻), 新物理学シリーズ 5, 6, 培風館, 1968
[7]『ニールス・ボーア論文集 1, 因果性と相補性』, 山本義隆訳, 岩波文庫, 1999
[8]『ニールス・ボーア論文集 2, 量子力学の誕生』, 山本義隆訳, 岩波文庫, 2000
[9] http://pdg.lbl.gov/2012/reviews/contents_sports.html の「Constants, Units, Atomic and Nuclear Properties」の下の諸表