超伝導

2013/2/3, 小又 志郎

1　超伝導とはどういう現象か?

1.1　超伝導の発見

歴史

1.2　マイスナー効果と磁気浮上

- 完全導体 (電気抵抗ゼロ)
- <u>完全反磁性</u> (磁束の排除)

1.3　磁束の量子化

$$\phi = n\phi_0, \quad \phi_0 = \frac{h}{2e} : \text{磁束量子}$$

1.4　第一種と第二種の超伝導体

第二種超伝導体: 渦糸、アブリコソフ格子、超伝導磁石、渦糸 (磁束) のピン止め (応用上重要)

2　超伝導の理論

2.1　GL 理論

第 2 種の相転移: 秩序変数 (波動関数) $\Psi(\boldsymbol{r})$ で記述 (現象論、熱力学)

2.2　GL の自由エネルギーと熱平衡の条件式

ランダウの自由エネルギー (第 10 章、式 (10.11))

$$F_{\mathrm{L}}(T,V,\Psi) = F_{\mathrm{L}}(T,V,0) + a|\Psi|^2 + b|\Psi|^4 + O(|\Psi|^6) \tag{1}$$

において、

- (超流動のときと同様に) Ψ の空間変化を許す: $\Psi \to \Psi(\boldsymbol{r})$
- 磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を入れる。
- $\Psi(\boldsymbol{r})$ の空間変化の寄与は、量子力学のハミルトニアンから類推: $\dfrac{\hbar^2}{2m^*}\left|\left[\nabla - i\dfrac{e^*}{\hbar}\boldsymbol{A}\right]\Psi(\boldsymbol{r})\right|^2$
- 磁場のエネルギー: 磁束の排除に伴い、$\dfrac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$ だけ増大。

GL の自由エネルギー

$$F_{\mathrm{L}}(T,V,\Psi) = F_{\mathrm{L}}(T,V,0) + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left|\left[\nabla - i\frac{e^*}{\hbar}\boldsymbol{A}\right]\Psi(\boldsymbol{r})\right|^2 + a|\Psi|^2 + b|\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{2}$$

Ψ^* 変分より、GL 方程式 (非線型のシュレーディンガー方程式の形)

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left[\nabla - i\frac{e^*}{\hbar}\boldsymbol{A}\right]^2\Psi(\boldsymbol{r}) + a\Psi(\boldsymbol{r}) + 2b|\Psi(\boldsymbol{r})|^2\Psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3}$$

$\boldsymbol{A}$ 変分より、アンペールの式 (磁場 $\boldsymbol{B}$ により超伝導電流 $\boldsymbol{J}$ が誘起される)

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

ただし、

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -i\hbar\frac{e^*}{2m^*}[\Psi(\boldsymbol{r})^*\nabla\Psi(\boldsymbol{r}) - \Psi(\boldsymbol{r})\nabla\Psi(\boldsymbol{r})^*] - \frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi(\boldsymbol{r})|^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

BCS 理論で、$e^* = -2e$ と決まる。

2.3 熱平衡状態

磁場がない場合: ランダウ理論（超流動の場合）と同じ

磁場がある場合

近似: $\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi_0 \exp[i\theta(\boldsymbol{r})]$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \hbar\frac{e^*}{m^*}\Psi_0^2\left[\nabla\theta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^*}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right] \tag{6}$$

rot をとると、ロンドン方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^{*2}}{m^*}\Psi_0^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{7}$$

が得られる。

一方、アンペールの式 (4) の rot をとり、右辺にロンドン方程式 (7) を用いると、

$$\nabla^2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}), \quad \frac{1}{\lambda^2} = \mu_0\frac{e^{*2}}{m^*}\Psi_0^2 \tag{8}$$

磁場は、λ: 磁束侵入長 (ロンドン侵入長, $\sim 10^{-7}$ m)、の程度しか超伝導体に侵入できない (マイスナー効果)。

秩序変数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ の本質は? $\rightarrow$ BCS 理論

■参考　ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a} \tag{9}$$

マクスウェル方程式 (第 1 章, 1.4 節)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{12}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{13}$$

2.4 クーパー対

フェルミ面上で逆向きの運動量をもった電子の対: 引力があれば結合状態になる

フェルミ粒子 2 個なのでボース粒子とみなせる $\rightarrow$ ボース・アインシュタイン凝縮

2.5 電子・フォノン相互作用

- 電気力 (クーロン相互作用): 光子 (フォトン) の交換
- 核力 (∼ 強い相互作用): 中間子 (メソン) の交換
- クーパー対の引力: フォノン (格子振動 ∼ 音波の粒子) の交換

実験では、同位体効果により実証 (ただし、酸化物高温超伝導体などについては未解明)。

本当は、超伝導の理論に関しては、自発的対称性の破れ、エネルギーギャップ (質量ギャップ) の出現、ヒッグス機構との関係、マイスナー効果とクォークの閉じこめとの関係なども重要な話題ですが、それは第 14 章 (14.3.2 節) で少し言及されているので、そちらにおまかせします。

3 超伝導体の応用

- 超伝導磁石
- DC ジョセフソン効果
- SQUID (超伝導量子干渉計)
- AC ジョセフソン効果: 電圧標準 ($2e/h$: ジョセフソン定数)

4 参考: ディラック (パイエルス) の置き換え

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \quad \text{(Lorentz 力)} \tag{14}$$

を得るためのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi \tag{15}$$

ただし

$$\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Check: 正準方程式

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) \tag{16}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = q\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - \phi) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} - q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{18}$$

$$= q\left\{\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{A}\right\} \tag{19}$$

$$= q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{20}$$

ここで、

$$\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{21}$$

を用いた。

5　文献紹介

超伝導については、Schrieffer (BCS の S) や Tinkham などの有名な古典的教科書もあり、あるいは Kittel などの一般の物性の教科書にも概説があります (いずれも邦訳あり)。以下は、それ以外で、比較的読みやすくてためになりそうと思ったもの。品切本が多いですが、図書館などで参照してみることはできると思います。

[1] は、高温超伝導ブームの少し後に出たものですが、現在は品切。薄い縦書きの新書ながら、数式を使わずに量子力学入門から超伝導の理論・応用まで書いてあり、かなりレベルは高いです。同じく中嶋先生には『超伝導入門』(培風館、新物理学シリーズ、本章 (第 12 章) の参考文献にあがっているもの) や『マクロ量子現象—超伝導と超流動』（講談社、物理のたねあかしシリーズ、第 11 章の参考文献にあがっているもの）という良い教科書もありますが、なぜかみんな品切。

[2] は、上の [1] よりももう少していねいに記述した入門書。やはり現在は品切。横書きで、説明のためにごくやさしい数式は使っていますが、温度とは何かということからはじまって、低温現象に着目した物理学全般への良い入門になっていると思います。クーパー対の電子の間にどうやって引力が働くかについても、たとえを用いてわかりやすく説明しています。長岡先生には、ほかに『低温・超伝導・高温超伝導』(丸善、パリティブックス) という縦書きの入門書もありますが、こちらも現在品切。

[3] は「岩波講座 物理の世界」シリーズの一冊。このシリーズの本はたいていそうですが、読むのに若干の物理の基礎知識が必要。超伝導・超流動について、薄い本の中にコンパクトに手際よくまとまっています。最後の章には、ヘリウム 3 の超流動と宇宙物理学 (ビックバンにおける真空の相転移) との関係にもふれています。ただしこの本も現在品切のようですね。

[4] は、わりと標準的で読みやすいと思いました。これは新刊で出ていますが、ちょっと高い。

[5] は、最近出た本。場の理論の基礎知識を前提とした advanced な教科書ですが、それだけにむしろ単刀直入に理論の本質に迫ることができるように書かれているという印象です。

参考文献

[1] 中嶋貞雄『超伝導』, 岩波新書, 1988
[2] 長岡洋介『極低温の世界—超伝導への道』, 岩波書店, 1982
[3] 勝本信吾・河野公俊『超伝導と超流動』, 岩波書店 (岩波講座 物理の世界, 物質科学の展開 1), 2006
[4] 家泰弘『超伝導』, 朝倉書店 (朝倉物性物理シリーズ), 2005
[5] 池田隆介『超伝導転移の物理』, 丸善出版 (シュプリンガー現代理論物理学シリーズ), 2012